

PROTOTIPO II PARZIALE

1) Risolvere il seguente sistema lineare:

$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ 3x - 2y + z = 2 \\ -x + 2z = 5 \end{cases}$$

Trattandosi di un sistema quadrato (il numero delle equazioni è uguale a numero delle incognite), occorre, in primo luogo, verificare se il sistema dato è o meno risolubile secondo Cramer, cioè se è soddisfatta o meno la condizione necessaria e sufficiente imposta dal Teorema di Cramer, secondo cui un sistema quadrato ammette una ed una sola soluzione se e solo il determinante della matrice dei coefficienti associata al sistema assegnato è diverso da zero. Nel caso specifico, quindi, risulta:

$$A = \begin{pmatrix} \overset{x}{1} & \overset{y}{1} & \overset{z}{1} \\ 3 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -4 - 1 + 0 - 2 - 0 - 6 = -13 \neq 0 \Rightarrow \Delta = \det A = -13$$

Poiché, il determinante della matrice dei coefficienti delle incognite del sistema è diverso da zero, ne segue che il sistema dato, secondo il Teorema di Cramer, ammette una ed una sola soluzione ricavabile dalle ben note formule di Cramer. Precisamente risulta:

$$(x, y, z) = \left(\frac{\Delta_x}{\Delta}, \frac{\Delta_y}{\Delta}, \frac{\Delta_z}{\Delta} \right)$$

avendo indicato con:

Δ il determinante della matrice dei coefficienti delle incognite del sistema, ovvero il $\det A$;

Δ_x il determinante della matrice ottenuta da A sostituendo la colonna dei coefficienti della x con la colonna dei termini noti;

Δ_y il determinante della matrice ottenuta da A sostituendo la colonna dei coefficienti della y con la colonna dei termini noti;

Δ_z il determinante della matrice ottenuta da A sostituendo la colonna dei coefficienti della z con la colonna dei termini noti.

Ma allora segue:

$$A = \begin{pmatrix} \overset{x}{1} & \overset{y}{1} & \overset{z}{1} \\ 3 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \Delta_x = \begin{vmatrix} \overset{N}{6} & \overset{y}{1} & \overset{z}{1} \\ 2 & -2 & 1 \\ 5 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -24 + 5 + 0 + 10 - 0 - 4 = -13 \Rightarrow \Delta_x = -13$$

$$A = \begin{pmatrix} x & y & z \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \Delta_y = \begin{vmatrix} x & N & z \\ 1 & 6 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ -1 & 5 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 6 + 15 + 2 - 5 - 36 = -26 \Rightarrow \Delta_y = -26$$

$$A = \begin{pmatrix} x & y & z \\ 3 & 1 & -1 \\ -4 & -2 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \Delta_z = \begin{vmatrix} x & y & N \\ 1 & 1 & 6 \\ 3 & -2 & 2 \\ -1 & 0 & 5 \end{vmatrix} = -10 - 2 + 0 - 12 - 0 - 15 = -39 \Rightarrow \Delta_z = -39$$

Quindi si ha:

$$(x, y, z) = \left(\frac{\Delta_x}{\Delta}, \frac{\Delta_y}{\Delta}, \frac{\Delta_z}{\Delta} \right) = \left(\frac{-13}{-13}, \frac{-26}{-13}, \frac{-39}{-13} \right) = (1, 2, 3)$$

cioè:

$$(x, y, z) = (1, 2, 3)$$

Risolviamo adesso il medesimo sistema con il metodo della matrice inversa e confrontiamo che la soluzione che otterremo è identica a quella precedentemente trovata con il Teorema di Cramer. Poiché, per quanto visto sopra, risulta $\det A = \Delta = -13 \neq 0$, segue che la matrice A ammette l'inversa A^{-1} che occorre ora determinare con uno dei due metodi ben noti:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Calcoliamo l'inversa di A utilizzando il metodo della matrice dei complementi algebrici, ovvero la relazione:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot (A^*)^T$$

Dobbiamo quindi scrivere, in primo luogo, la matrice dei complementi algebrici A^* . Risulta:

$$\begin{aligned} c_{11} &= + \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -4; & c_{12} &= - \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -7; & c_{13} &= + \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = -2; \\ c_{21} &= - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -2; & c_{22} &= + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 3; & c_{23} &= - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = -1; \\ c_{31} &= + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 3; & c_{32} &= - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 2; & c_{33} &= + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = -5 \end{aligned}$$

da cui segue:

$$A^* = \begin{pmatrix} -4 & -7 & -2 \\ -2 & 3 & -1 \\ 3 & 2 & -5 \end{pmatrix} \Rightarrow (A^*)^T = \begin{pmatrix} -4 & -2 & 3 \\ -7 & 3 & 2 \\ -2 & -1 & -5 \end{pmatrix}$$

Pertanto:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot (A^*)^T = \frac{1}{-13} \cdot \begin{pmatrix} -4 & -2 & 3 \\ -7 & 3 & 2 \\ -2 & -1 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{13} & \frac{2}{13} & -\frac{3}{13} \\ \frac{7}{13} & -\frac{3}{13} & -\frac{2}{13} \\ \frac{2}{13} & \frac{1}{13} & \frac{5}{13} \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{4}{13} & \frac{2}{13} & -\frac{3}{13} \\ \frac{7}{13} & -\frac{3}{13} & -\frac{2}{13} \\ \frac{2}{13} & \frac{1}{13} & \frac{5}{13} \end{pmatrix}$$

Dunque:

$$X = A^{-1}N \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{13} & \frac{2}{13} & -\frac{3}{13} \\ \frac{7}{13} & -\frac{3}{13} & -\frac{2}{13} \\ \frac{2}{13} & \frac{1}{13} & \frac{5}{13} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{24}{13} + \frac{4}{13} - \frac{15}{13} \\ \frac{42}{13} - \frac{6}{13} - \frac{10}{13} \\ \frac{12}{13} + \frac{2}{13} + \frac{25}{13} \end{pmatrix}$$

cioè:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Dunque la soluzione trovata, operando sia con il metodo di Cramer che con quello della matrice inversa, com'è facile constatare, è la medesima.

2) Risolvere il seguente sistema lineare:

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 10 \\ x + 2z = 5 \\ 3x - 2y + 5z = 10 \end{cases}$$

Occorre, in primo luogo, verificare se il sistema dato, essendo quadrato (il numero delle equazioni è uguale a numero delle incognite), è o meno risolubile secondo Cramer, cioè se è soddisfatta o meno la condizione necessaria e sufficiente imposta dal Teorema di Cramer, secondo cui un sistema quadrato ammette una ed una sola soluzione se e solo il determinante della matrice dei coefficienti associata al sistema assegnato è diverso da zero. Nel caso specifico, quindi, risulta:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 3 & -2 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow \det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 3 & -2 & 5 \end{vmatrix} = 0 + 12 - 6 - 0 + 4 - 10 = 0 \Rightarrow \Delta = \det A = 0$$

Poiché, il determinante della matrice dei coefficienti delle incognite del sistema è uguale a zero, ne segue che il sistema dato non è risolubile utilizzando il Teorema di Cramer, motivo per cui bisogna andare a controllare se esso ammette soluzioni in base al Teorema di Rouché-Capelli, ovvero se il rango della matrice incompleta è uguale al rango della matrice completa.

Risulta, pertanto:

$$A = \begin{matrix} & \begin{matrix} x & y & z \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 3 & -2 & 5 \end{pmatrix} & \Rightarrow & 0 < r(A) \leq 3 & \Rightarrow & \det A = \Delta = 0 & \Rightarrow & r(A) \neq 3 \end{matrix}$$

Poiché:

$$\begin{matrix} & \begin{matrix} x & y \end{matrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \end{matrix}$$

ne segue che è:

$$r(A) = 2$$

in quanto esiste un minore del secondo ordine, estraibile da A , diverso da zero.

Occorre ora controllare il rango della matrice completa, ottenuta dalla matrice A con l'aggiunta della colonna dei termini noti:

$$AN = \begin{matrix} & \begin{matrix} x & y & z & N \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 10 \\ 1 & 0 & 2 & 5 \\ 3 & -2 & 5 & 10 \end{pmatrix} & \Rightarrow & 0 < r(AN) \leq 3 \end{matrix}$$

Utilizzando il Teorema degli Orlati, si ha:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \Rightarrow r(AN) \geq 2$$

per cui occorre andare a calcolare adesso i suoi minori orlati.

Precisamente:

$$M' = \det A = \begin{vmatrix} \begin{matrix} x & y & z \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 3 & -2 & 5 \end{matrix} \end{vmatrix} = 0; \quad M'' = \begin{vmatrix} \begin{matrix} x & y & N \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 & 2 & 10 \\ 1 & 0 & 5 \\ 3 & -2 & 10 \end{matrix} \end{vmatrix} = 0 + 30 - 20 - 0 + 10 - 20 = 0$$

Poiché entrambi i minori orlati del terzo ordine sono nulli, ne segue proprio che: cioè

$$r(AN) = 2$$

cioè:

$$r(A) = r(AN) = r = 2$$

ovvero è soddisfatta la condizione necessaria e sufficiente di risolubilità di un sistema imposta dal Teorema di Rouché-Capelli. Dunque il sistema dato ammette soluzioni.

Poiché, inoltre, il numero delle incognite del sistema è $n = 3$ (le incognite che figurano nel sistema sono proprio x , y e z) e risulta $n > r$, segue che il sistema ammette $\infty^{n-r} = \infty^{3-2} = \infty^1$ soluzioni, cioè le soluzioni del sistema dipendono da un unico parametro.

Essendo, poi, il minore diverso da zero:

$$\begin{vmatrix} x & y \\ 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$$

costituito dai coefficienti delle incognite x ed y che figurano nella seconda e nella terza equazione, il sistema dato è equivalente al seguente:

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 10 \\ x + 2z = 5 \end{cases}$$

Inoltre, poiché nel minore non nullo considerato sono stati coinvolti esclusivamente i coefficienti della x e della y , e non quelli della z , bisogna considerare come parametro proprio l'incognita trascurata, cioè la z . Ne segue, quindi, posto $z = t$ parametro reale:

$$\begin{cases} x + 2y = 10 - 3t \\ x = 5 - 2t \end{cases}$$

che ora, avendo la matrice dei coefficienti diversa da zero, si può risolvere o con uno dei metodi classici, oppure con le regole di Cramer. Ne segue:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta = -2$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 10 - 3t & 2 \\ 5 - 2t & 0 \end{vmatrix} = 0 - 10 + 4t = 4t - 10 \quad \Rightarrow \quad \Delta_x = 4t - 10$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 10 - 3t \\ 1 & 5 - 2t \end{vmatrix} = 5 - 2t - 10 + 3t = t - 5 \quad \Rightarrow \quad \Delta_y = t - 5$$

da cui si ricava:

$$(x, y) = \left(\frac{\Delta_x}{\Delta}, \frac{\Delta_y}{\Delta} \right) = \left(\frac{4t - 10}{-2}, \frac{t - 5}{-2} \right) = \left(-2t + 5, -\frac{1}{2}t + \frac{5}{2} \right)$$

soluzione del sistema equivalente a quello assegnato.

Dunque la soluzione del sistema dato sarà:

$$(x, y, z) = \left(-2t + 5, -\frac{1}{2}t + \frac{5}{2}, t \right)$$

con t parametro reale ($t \in \mathbb{R}$).

3) Risolvere il seguente sistema lineare:

$$\begin{cases} 2x + y - z + 3w = 2 \\ 5x + 4y - 2z + 5w = 1 \\ x + 2y - w = -3 \end{cases}$$

Occorre, in primo luogo, osservare che il sistema dato è rettangolare (il numero delle equazioni è diverso dal numero delle incognite): è, infatti, un sistema di ordine 3×4 (3 equazioni e 4 incognite). Bisogna allora andare a controllare se esso ammette soluzioni in base al Teorema di Rouché-Capelli, ovvero se il rango della matrice incompleta è uguale al rango della matrice completa.

Risulta, pertanto:

$$A = \begin{pmatrix} \overset{x}{2} & \overset{y}{1} & \overset{z}{-1} & \overset{w}{3} \\ 5 & 4 & -2 & 5 \\ 1 & 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow 0 < r(A) \leq 3$$

Utilizzando il Teorema degli Orlati, si ha:

$$\begin{vmatrix} \overset{x}{2} & \overset{y}{1} \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = 8 - 5 = 3 \neq 0 \Rightarrow r(A) \geq 2$$

per cui occorre andare a calcolare adesso i suoi minori orlati.

Precisamente:

$$M' = \begin{vmatrix} \overset{x}{2} & \overset{y}{1} & \overset{z}{-1} \\ 5 & 4 & -2 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 2 - 10 + 4 + 8 - 0 = 0; \quad M'' = \begin{vmatrix} \overset{x}{2} & \overset{y}{1} & \overset{w}{3} \\ 5 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -8 + 5 + 30 - 12 - 20 + 5 = 0$$

Poiché tutti i minori orlati del terzo ordine sono uguali a zero, segue:

$$r(A) \neq 3 \Rightarrow r(A) = 2$$

Consideriamo adesso la matrice completa ottenuta da A aggiungendo ad essa la colonna dei termini noti:

$$AN = \begin{pmatrix} \overset{x}{2} & \overset{y}{1} & \overset{z}{-1} & \overset{w}{3} & \overset{N}{2} \\ 5 & 4 & -2 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & -1 & -3 \end{pmatrix} \Rightarrow 0 < r(AN) \leq 3$$

Occorre determinare ora il rango di AN . Sempre per il Teorema degli Orlati si può partire da un minore del secondo ordine diverso da zero estraibile dalla matrice AN .

Sia esso:

$$\begin{vmatrix} \overset{x}{2} & \overset{y}{1} \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = 8 - 5 = 3 \neq 0 \Rightarrow r(AN) \geq 2$$

Due orlati di tali minori sono stati già calcolati in precedenza quando si è determinato il rango della matrice incompleta, precisamente:

$$M' = \begin{vmatrix} \overset{x}{2} & \overset{y}{1} & \overset{z}{-1} \\ 5 & 4 & -2 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 2 - 10 + 4 + 8 - 0 = 0; \quad M'' = \begin{vmatrix} \overset{x}{2} & \overset{y}{1} & \overset{w}{3} \\ 5 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -8 + 5 + 30 - 12 - 20 + 5 = 0$$

Resta allora da calcolare l'ultimo minore orlato ottenuto aggiungendo la quarta colonna e la terza riga:

$$M''' = \begin{vmatrix} \overset{x}{2} & \overset{y}{1} & \overset{N}{2} \\ 5 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \end{vmatrix} = -24 + 1 + 20 - 8 - 4 + 15 = 0$$

Poiché anche in questo caso tutti i minori orlati del terzo ordine sono uguali a zero, si può affermare che è:

$$r(AN) = 2$$

Dunque:

$$r(A) = r(AN) = r = 2$$

ovvero è soddisfatta la condizione necessaria e sufficiente di risolubilità di un sistema imposta dal Teorema di Rouché-Capelli. Ne segue che il sistema dato ammette soluzioni.

Poiché, inoltre, il numero delle incognite del sistema è $n = 4$ (le incognite che figurano nel sistema sono proprio x , y , z e w) e risulta $n > r$, segue che il sistema ammette $\infty^{n-r} = \infty^{4-2} = \infty^2$ soluzioni, cioè le soluzioni del sistema dipendono da due parametri.

Poiché il minore diverso da zero:

$$\begin{vmatrix} x & y \\ 2 & 1 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = 8 - 5 = 3 \neq 0$$

è costituito dai coefficienti delle incognite x ed y che figurano nella prima e nella seconda equazione, il sistema dato è equivalente al seguente:

$$\begin{cases} 2x + y - z + 3w = 2 \\ 5x + 4y - 2z + 5w = 1 \end{cases}$$

Inoltre, poiché nel minore non nullo considerato sono stati coinvolti esclusivamente i coefficienti della x e della y , non quelli della z e della w , bisogna considerare come parametri proprio le incognite trascurate, cioè la z e la w . Ne segue, quindi, posto $z = h$ e $w = k$ parametri reali:

$$\begin{cases} 2x + y = 2 + h - 3k \\ 5x + 4y = 1 + 2h - 5k \end{cases}$$

che ora, avendo la matrice dei coefficienti diversa da zero, si può risolvere o con uno dei metodi classici, oppure con le regole di Cramer. Ne segue:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = 8 - 5 = 3 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta = 3$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 2+h-3k & 1 \\ 1+2h-5k & 4 \end{vmatrix} = 8 + 4h - 12k - 1 - 2h + 5k = 2h - 7k + 7 \quad \Rightarrow \quad \Delta_x = 2h - 7k + 7$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 2 & 2+h-3k \\ 5 & 1+2h-5k \end{vmatrix} = 2 + 4h - 10k - 10 - 5h + 15k = -h + 5k - 8 \quad \Rightarrow \quad \Delta_y = -h + 5k - 8$$

da cui si ricava:

$$(x, y, z) = \left(\frac{\Delta_x}{\Delta}, \frac{\Delta_y}{\Delta} \right) = \left(\frac{2h-7k+7}{3}, \frac{-h+5k-8}{3} \right)$$

soluzione del sistema equivalente a quello assegnato.

Dunque la soluzione del sistema dato sarà:

$$(x, y, z, w) = \left(\frac{2h-7k+7}{3}, \frac{-h+5k-8}{3}, h, k \right)$$

con h e k parametri reali ($h, k \in \mathbb{R}$).

4) Studiare la seguente funzione polinomiale:

$$y = 3x^3 + 2x^2 - 7x + 2$$

CAMPO DI ESISTENZA

Poiché si tratta di una funzione polinomiale, risulta:

$$C.E. = \{x \in \mathbb{R} : -\infty < x < +\infty\}$$

La funzione data, come del resto tutte le funzioni polinomiali, è definita su tutta la retta reale, motivo per cui non ha asintoti verticali!!!

INTERSEZIONI CON GLI ASSI

Poiché si è in presenza di un polinomio di terzo grado, occorre, in primo luogo, vedere se è possibile scomporlo nel prodotto di due polinomi, uno di primo grado ed uno di secondo grado, attraverso la Regola di Ruffini. I divisori del termine noto, ovvero 2, sono esattamente ± 1 , ± 2 , essendo 2 un numero primo. Ma allora si ha:

$$P(x) = 3x^3 + 2x^2 - 7x + 2$$

da cui, procedendo per tentativi, risulta:

$$P(x = +1) = 3 \cdot 1^3 + 2 \cdot 1^2 - 7 \cdot 1 + 2 = 3 + 2 - 7 + 2 = 0$$

cioè per $x = +1$ il polinomio si annulla. Quindi si ottiene il seguente prospetto:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 3 & 2 & -7 & +2 \\ +1 & & 3 & 5 & -2 \\ \hline & 3 & 5 & -2 & 0 \end{array}$$

Pertanto il polinomio $P(x)$ si può scrivere anche nel seguente modo:

$$P(x) = 3x^3 + 2x^2 - 7x + 2 = (x - 1)(3x^2 + 5x - 2)$$

Inoltre è possibile scomporre il polinomio di secondo grado:

$$Q(x) = 3x^2 + 5x - 2$$

utilizzando la formula risolutiva:

$$x_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{25 + 24}}{6} = \frac{-5 \pm \sqrt{49}}{6} = \frac{-5 \pm 7}{6} \Rightarrow x_1 = \frac{-5 - 7}{6} = -2 \quad \text{ed} \quad x_2 = \frac{-5 + 7}{6} = \frac{1}{3}$$

Quindi risulta:

$$Q(x) = 3x^2 + 5x - 2 = (x + 2)\left(x - \frac{1}{3}\right)$$

da cui:

$$P(x) = 3x^3 + 2x^2 - 7x + 2 = (x - 1)(3x^2 + 5x - 2) = (x - 1)(x + 2)\left(x - \frac{1}{3}\right)$$

Scomposto il polinomio di terzo grado, risulta ora possibile determinare le intersezioni della funzione data con gli assi cartesiani:

sostituendo, in y, al posto della x il valore 0

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 3x^3 + 2x^2 - 7x + 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 2 \end{cases} \Rightarrow A = (0, 2) \text{ è il punto di intersezione della funzione con l'asse } y$$

sostituendo, in y, al posto della y il valore 0

$$\begin{cases} y = 0 \\ 0 = 3x^3 + 2x^2 - 7x + 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ (x-1)(x+2)\left(x-\frac{1}{3}\right) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x-1=0 \\ x+2=0 \\ x-\frac{1}{3}=0 \end{cases} \Rightarrow$$

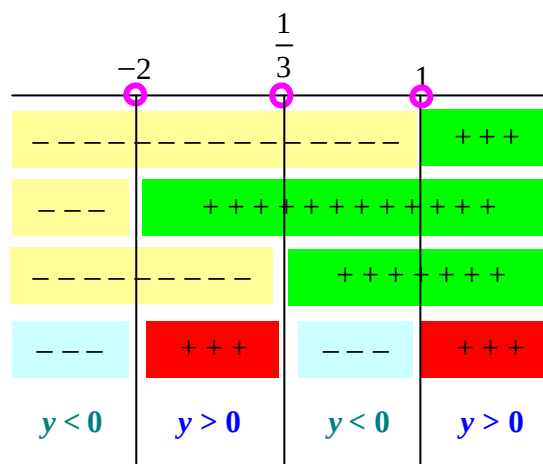
$$\Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x_1 = 1 \\ x_2 = -2 \\ x_3 = \frac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow B = (1, 0); C = (-2, 0); D = \left(\frac{1}{3}, 0\right) \text{ sono i punti di intersezione della funzione con l'asse } x$$

SEGNO DELLA FUNZIONE

Risulta:

$$y > 0 \Rightarrow 3x^3 + 2x^2 - 7x + 2 > 0 \Rightarrow (x-1)(x+2)\left(x-\frac{1}{3}\right) > 0 \Rightarrow \begin{cases} x-1 > 0 \\ x+2 > 0 \\ x-\frac{1}{3} > 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x > 1 \\ x > -2 \\ x > \frac{1}{3} \end{cases}$$



Dunque si ha:

$$y > 0 \text{ per } -2 < x < \frac{1}{3}, x > 1$$

LIMITI AGLI ESTREMI DEL CAMPO DI ESISTENZA

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} (3x^3 + 2x^2 - 7x + 2) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (3x^3) = +\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} y = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{x \rightarrow -\infty} (3x^3 + 2x^2 - 7x + 2) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (3x^3) = -\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} y = -\infty$$

La funzione non ha asintoti orizzontali!!!

STUDIO DEL SEGNO DELLA DERIVATA PRIMA

Risulta:

$$D(3x^3 + 2x^2 - 7x + 2) = 9x^2 + 4x - 7$$

da cui segue:

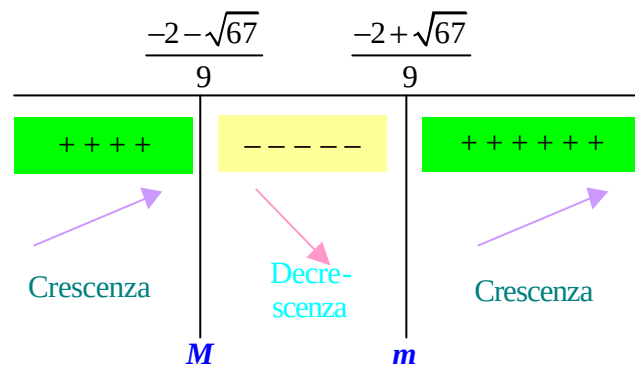
$$y' > 0 \Rightarrow 9x^2 + 4x - 7 > 0$$

Troviamo, in primo luogo, le soluzioni dell'equazione associata a tale disequazione utilizzando la formula risolutiva ridotta:

$$x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 63}}{9} = \frac{-2 \pm \sqrt{67}}{9} \Rightarrow x_1 = \frac{-2 - \sqrt{67}}{9} \cong -1,13 \text{ ed } x_2 = \frac{-2 + \sqrt{67}}{9} \cong 0,68$$

da cui:

$$9x^2 + 4x - 7 > 0 \Rightarrow x < \frac{-2 - \sqrt{67}}{9} \text{ ed } x > \frac{-2 + \sqrt{67}}{9}$$



Dunque la funzione ha un massimo in $x = \frac{-2 - \sqrt{67}}{9}$ ed un minimo in $x = \frac{-2 + \sqrt{67}}{9}$.

In particolare:

$$x = \frac{-2 - \sqrt{67}}{9} \Rightarrow y = 3 \left(\frac{-2 - \sqrt{67}}{9} \right)^3 + 2 \left(\frac{-2 - \sqrt{67}}{9} \right)^2 - 7 \left(\frac{-2 - \sqrt{67}}{9} \right) + 2 \cong 8,13$$

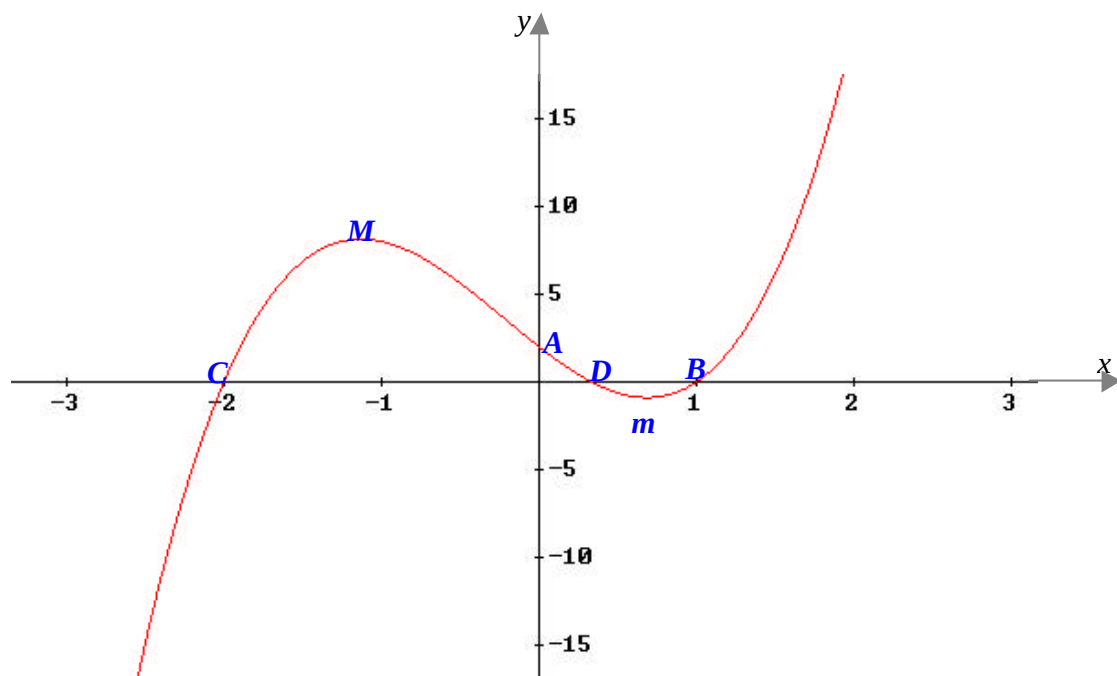
$$x = \frac{-2 + \sqrt{67}}{9} \Rightarrow y = 3 \left(\frac{-2 + \sqrt{67}}{9} \right)^3 + 2 \left(\frac{-2 + \sqrt{67}}{9} \right)^2 - 7 \left(\frac{-2 + \sqrt{67}}{9} \right) + 2 \cong -0,89$$

Ne segue, quindi, che:

$m(0,68; -0,89)$ è il punto di *minimo*

$M(-1,13; 8,13)$ è il punto di *Massimo*

IL GRAFICO



5) Studiare la seguente funzione razionale fratta:

$$y = \frac{x^2 - 2x - 3}{3x^2 + 2}$$

CAMPO DI ESISTENZA

Poiché si tratta di una funzione razionale fratta, risulta:

$$C.E. = \{x \in \mathbb{R} : 3x^2 + 2 \neq 0\} = \{x \in \mathbb{R} : -\infty < x < +\infty\}$$

Essendo, però, $3x^2 + 2$ la somma di due quadrati, precisamente $(\sqrt{3}x)^2 = 3x^2$ e $(\sqrt{2})^2 = 2$, segue che esso è sempre diverso da zero.

La funzione data, pertanto, non ha asintoti verticali!!!

INTERSEZIONI CON GLI ASSI

Risulta:

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = \frac{x^2 - 2x - 3}{3x^2 + 2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = -\frac{3}{2} = -1,5 \end{cases} \Rightarrow A = \left(0, -\frac{3}{2}\right) \text{ è il punto di intersezione della funzione con l'asse } y$$

$$\begin{cases} y = 0 \\ 0 = \frac{x^2 - 2x - 3}{3x^2 + 2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ \frac{x^2 - 2x - 3}{3x^2 + 2} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x^2 - 2x - 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

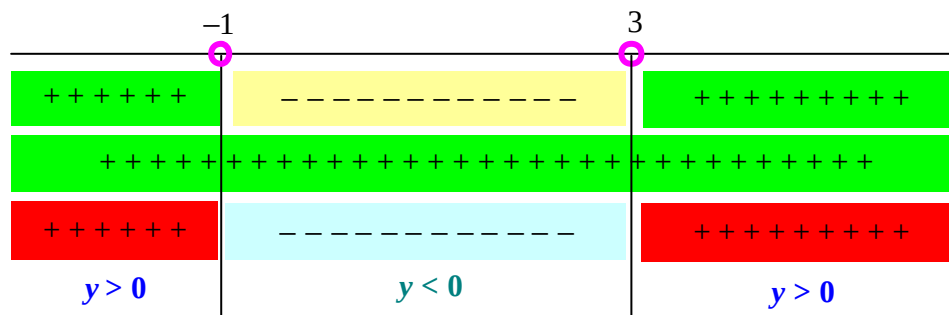
$$\Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+3}}{1} = 1 \pm \sqrt{4} = 1 \pm 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x_1 = 1 - 2 = -1 \end{cases} \text{ e } \begin{cases} y = 0 \\ x_2 = 1 + 2 = 3 \end{cases} \Rightarrow$$

$\Rightarrow B = (-1, 0)$ e $C = (3, 0)$ sono i punti di intersezione della funzione con l'asse x

SEGNO DELLA FUNZIONE

Risulta:

$$y > 0 \Rightarrow \frac{x^2 - 2x - 3}{3x^2 + 2} > 0 \Rightarrow \begin{cases} x^2 - 2x - 3 > 0 \\ 3x^2 + 2 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < -1, x > 3 \\ \text{sempre (somma di due quadrati)} \end{cases}$$



Dunque:

$$y > 0 \text{ per } -1 < x, x > 3$$

LIMITI AGLI ESTREMI DEL CAMPO DI ESISTENZA

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{x^2 - 2x - 3}{3x^2 + 2} \right) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{x^2}{3x^2} \right) = \frac{1}{3} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = \frac{1}{3}$$

cioè la retta di equazione $y = \frac{1}{3}$ è un asintoto orizzontale per la funzione:

$$A.O.: y = \frac{1}{3}$$

STUDIO DEL SEGNO DELLA DERIVATA PRIMA

Risulta:

$$D\left(\frac{x^2 - 2x - 3}{3x^2 + 2}\right) = \frac{(2x - 2) \cdot (3x^2 + 2) - (x^2 - 2x - 3) \cdot (6x)}{(3x^2 + 2)^2} =$$
$$= \frac{6x^3 + 4x - 6x^2 - 4 - 6x^3 + 12x^2 + 18x}{(3x^2 + 2)^2} = \frac{6x^2 + 22x - 4}{(3x^2 + 2)^2}$$

da cui segue:

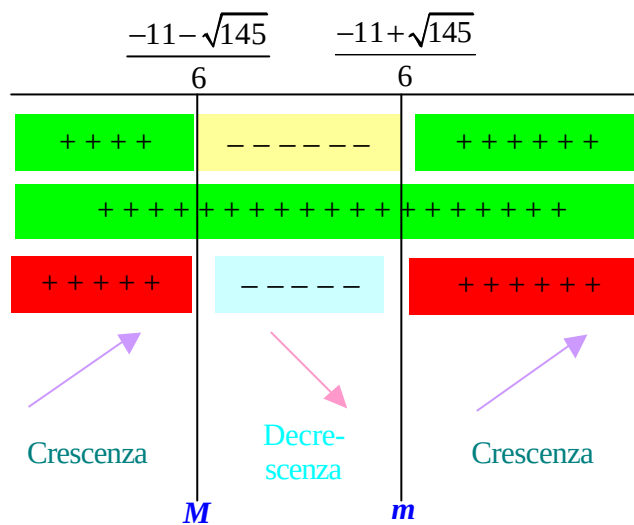
$$y' > 0 \Rightarrow \frac{6x^2 + 22x - 4}{(3x^2 + 2)^2} > 0 \Rightarrow \begin{cases} 6x^2 + 22x - 4 > 0 \\ (3x^2 + 2)^2 > 0 \end{cases}$$

Poiché risulta:

$$6x^2 + 22x - 4 = 0 \Rightarrow 3x^2 + 11x - 2 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{-11 \pm \sqrt{121 + 24}}{6} = \frac{-11 \pm \sqrt{145}}{6} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x_1 = \frac{-11 - \sqrt{145}}{6} \cong -3,84 \text{ ed } x_2 = \frac{-11 + \sqrt{145}}{6} \cong 0,17$$

segue:

$$y' > 0 \Rightarrow \begin{cases} 6x^2 + 22x - 4 > 0 \\ (3x^2 + 2)^2 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < \frac{-11 - \sqrt{145}}{6}, x > \frac{-11 + \sqrt{145}}{6} \\ \text{sempre (è un quadrato)} \end{cases}$$



Dunque la funzione ha un massimo in $x = \frac{-11 - \sqrt{145}}{6}$ ed un minimo in $x = \frac{-11 + \sqrt{145}}{6}$.

In particolare si ha:

$$x = \frac{-11 - \sqrt{145}}{6} \Rightarrow y = \frac{\left(\frac{-11 - \sqrt{145}}{6}\right)^2 - 2\left(\frac{-11 - \sqrt{145}}{6}\right) - 3}{3\left(\frac{-11 - \sqrt{145}}{6}\right)^2 + 2} \cong 0,42$$

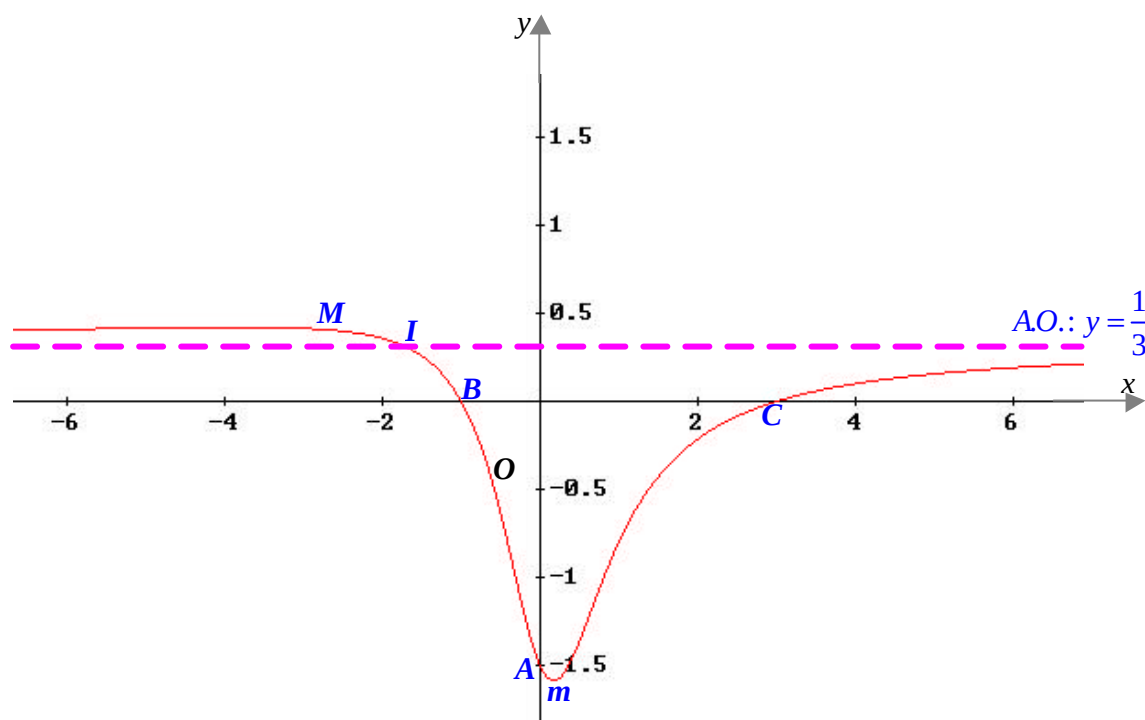
$$x = \frac{-11 + \sqrt{145}}{6} \Rightarrow y = \frac{\left(\frac{-11 + \sqrt{145}}{6}\right)^2 - 2\left(\frac{-11 + \sqrt{145}}{6}\right) - 3}{3\left(\frac{-11 + \sqrt{145}}{6}\right)^2 + 2} \cong -1,58$$

Ne segue, quindi, che:

$m(0,17; -1,58)$ è il punto di *minimo*

$M(-3,84; 0,42)$ è il punto di *Massimo*

IL GRAFICO



Osservazione

La funzione interseca l'asintoto orizzontale. Possiamo calcolare il punto di intersezione tra la funzione assegnata e la retta $y = \frac{1}{3}$ risolvendo il seguente sistema:

$$\begin{cases} y = \frac{x^2 - 2x - 3}{3x^2 + 2} \\ y = \frac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow \frac{x^2 - 2x - 3}{3x^2 + 2} = \frac{1}{3} \Rightarrow$$

(essendo uguali i primi membri delle due equazioni del sistema dovranno necessariamente essere uguali anche i secondi membri)

$$\Rightarrow \frac{x^2 - 2x - 3}{3x^2 + 2} - \frac{1}{3} = 0 \Rightarrow \frac{3(x^2 - 2x - 3) - (3x^2 + 2)}{3x^2 + 2} = 0 \Rightarrow \frac{3x^2 - 6x - 9 - 3x^2 - 2}{3x^2 + 2} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -6x - 11 = 0 \Rightarrow 6x + 11 = 0 \Rightarrow x = -\frac{11}{6} \cong -1,83$$

Dunque il punto di intersezione sarà $I = \left(-\frac{11}{6}, \frac{1}{3}\right)$.